О матричных уравнениях Пенлеве-2

В.Э. Адлер, В.В. Соколов

ИТФ им. Л.Д. Ландау

2 марта 2021 · Уфа

Общегородской семинар им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики

План доклада

Скалярное уравнение:
$$y'' = 2y^3 + zy + \alpha. \qquad \mathrm{P}_2$$

Если
$$y \in \mathrm{Mat}_n, \quad \alpha = \alpha 1,$$
где 1 — единичная матрица, то P_2 по прежнему проходит тест Ковалевской–Пенлеве [Balandin & Sokolov 1998] (это первая работа о матричных уравнениях Пенлеве).

Что нового [Adler & Sokolov 2020, arXiv 2012.05639, принято в ТМФ]

- Классификация более общего семейства уравнений по тесту КП
- Три матричных аналога P_2
- Редукции из матричных уравнений мКдФ и НУШ
- Изомонодромные пары Лакса

Рассмотрим такие возможные обобщения P_2:

$$y'' = \kappa[y, y'] + 2y^3 + zy + b_1 y + y b_2 + a, \quad a, b_1, b_2 \in \mathrm{Mat}_n, \quad \kappa \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Замечание: коэффициенты b_1, b_2 определены с точностью до замены

$$b_i \to b_i + \beta_i, \quad z \to z - \beta_1 - \beta_2, \quad \beta_i \in \mathbb{C}.$$

Здесь и далее скаляр β в сумме с матрицей означает $\beta 1$.

Классификационная теорема

С точностью до замены b_i, все случаи, когда (1) проходит тест КП, исчерпываются следующими:

$$\begin{aligned}
&y'' = 2y^3 + zy + by + yb + \alpha, && \alpha \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathrm{Mat}_n, && \mathrm{P}_2^0\\
&y'' = \pm[y, y'] + 2y^3 + zy + a, && a \in \mathrm{Mat}_n, && \mathrm{P}_2^1\\
&y'' = \pm 2[y, y'] + 2y^3 + zy + by + yb + a, && a, b \in \mathrm{Mat}_n, \quad [b, a] = \pm 2b. && \mathrm{P}_2^2
\end{aligned}$$

Уравнение P_2^0 (содержащее и случай Баландина–Соколова) появилось в [Retakh & Rubtsov 2010]. Другие два новые.

Тест Ковалевской–Пенлеве в скалярном случае

Для скалярного уравнения $y'' = 2y^3 + zy + \alpha$ всё просто. Ищем решение в виде формального ряда Лорана. Легко показать, что разложение должно начинаться с $(z - z_0)^{-1}$:

$$y = \frac{p}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots, \quad p, z_0, c_j \in \mathbb{C}.$$

При $(z - z_0)^{-3}$ имеем $p^2 = 1$, а дальше идут такие соотношения:

$$\begin{aligned}
(z - z_0)^{-2}: &\quad 6c_0 = 0\\
(z - z_0)^{-1}: &\quad 6c_1 = -pz_0\\
(z - z_0)^{0}: &\quad (6-2)c_2 = -p - \alpha\\
(z - z_0)^{1}: &\quad (6-6)c_3 = c_1(6pc_1 + z_0) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0 \quad \text{«резонанс»}\\
(z - z_0)^{2}: &\quad (6-12)c_4 = \dots\\
(z - z_0)^{3}: &\quad (6-20)c_5 = \dots
\end{aligned}$$

Это даёт ряд с двумя произвольными постоянными z_0 и c_3, как и нужно для общего решения уравнения второго порядка.

Замечание

На самом деле, построенный ряд Лорана не формальный — его радиус сходимости > 0. Но, чтобы доказать это, требуется более глубокое исследование, показывающее, что полюса не накапливаются и общее решение является мероморфной функцией. Тест КП даёт лишь необходимое условие для этого.

Общая схема теста в матричном случае

В неабелевом случае все усложняется. Мы по прежнему строим ряд

$$y = \frac{p}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots, \quad p, c_j \in \mathrm{Mat}_n, \quad z_0 \in \mathbb{C}.$$

- Работать с коэффициентами, как с абстрактными элементами какой-то некоммутативной алгебры, не удаётся. Приходится использовать матричное представление.
- К счастью, рассматривать отдельные элементы матриц всё же не нужно — работаем на уровне блоков.
- В частности, резонансы возникают блоками и для подсчёта их числа нужно суммировать размеры блоков.
- Всего для матриц размера $n \times n$ требуется набрать $2n^2$ произвольных постоянных в ответе (одна из них z_0).
- Считается, что тест выполнен, если нашлось хотя бы одно семейство решений, зависящее от этого числа параметров. При этом, кроме него могут быть и семейства с меньшим числом параметров.

Определяющие уравнения для коэффициентов имеют вид

$$p^3 = p,$$

$$L_{\frac{j+1}{2}\kappa}(c_j) - \tfrac{1}{2}j(j-1)c_j = f_j(z_0, p, c_0, \dots, c_{j-1}), \quad j \ge 0, \tag{2}$$

где

$$L_\sigma(c) = p^2c + pcp + cp^2 + \sigma(pc - cp)$$

и правые части f_j — некоторые конкретные выражения.

- Уравнения (2) служат для рекуррентного определения c_j — при условии, что линейный оператор в левой части обратим.
- Если же при каком-то j этот оператор вырожден (резонанс), то
  - в ответе появляются произвольные постоянные в количестве, равном размерности ядра;
  - условие разрешимости дает некоторые ограничения на правую часть, из которых извлекаются условия на параметры b_1, b_2 и a.

Первый этап: предварительный подсчет размерностей

Приведем p к жордановой форме

$$p = \mathrm{diag}(1_k, -1_m, 0_l), \quad l = n - k - m.$$

Естественно, для этого матрицы b_1, b_2 и a в (1) нужно сопрягать, это мы учтем позже. Сейчас оцениваем возможное число параметров в коэффициентах c_j. Запишем их в блочном виде:

$$c = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} k & m & l \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ m \\ l \end{array} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \Rightarrow$$

$$L_\sigma(c) = p^2c + pcp + cp^2 + \sigma(pc - cp) =$$
$$= \begin{pmatrix} 3c_{11} & (1+2\sigma)c_{12} & (1+\sigma)c_{13} \\ (1-2\sigma)c_{21} & 3c_{22} & (1-\sigma)c_{23} \\ (1-\sigma)c_{31} & (1+\sigma)c_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

То есть, блоки есть ни что иное, как собственные подпространства L_σ.

Лемма

Собственные числа оператора $L_\sigma : \mathrm{Mat}_n \to \mathrm{Mat}_n$ принадлежат множеству

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{\pm 1} = 1 \pm \sigma, \quad \lambda_{\pm 2} = 1 \pm 2\sigma, \quad \lambda_3 = 3.$$

Пространство Mat_n раскладывается в прямую сумму собственных подпространств

$$\mathrm{Mat}_n = V_0 \oplus V_{-1} \oplus V_1 \oplus V_{-2} \oplus V_2 \oplus V_3, \qquad L_\sigma V_i = \lambda_i V_i,$$

размерности которых равны

$$\dim V_0 = (n-k-m)^2, \quad \dim V_{\pm 1} = k(n-k) + m(n-m) - 2km,$$
$$\dim V_{\pm 2} = km, \quad \dim V_3 = k^2 + m^2.$$

Отметим, что от σ зависят лишь собственные числа, но не сами подпространства. Если λ_i и λ_j совпадают (например, λ_0 и λ_{-1} при $\sigma = 1$), то размерность соответствующего собственного подпространства равна сумме размерностей V_i и V_j.

Оператор в левой части (2)

$$L_{\frac{j+1}{2}\kappa} - \tfrac{1}{2}j(j-1)$$

вырожден, если одно из собственных значений $L_{\frac{j+1}{2}\kappa}$ совпадает с $\frac{1}{2}j(j-1)$. Когда такое случается?

- $\lambda_0 = 0$: дважды, при $j = 0$ и $j = 1$
- $\lambda_3 = 3$: один раз, при $j = 2$
- $\lambda_{\pm 1}$: не более одного раза, при $j = 2 \pm \kappa$
- $\lambda_{\pm 2}$: не более одного раза, при $j = 2 \pm 2\kappa$

Действительно, условия того, что $\lambda_{\pm 1}$ и $\lambda_{\pm 2}$ являются резонансными при индексе j, имеют, соответственно, вид

$$1 \pm \tfrac{1}{2}\kappa(j+1) = \tfrac{1}{2}j(j-1) \qquad \text{и} \qquad 1 \pm \kappa(j+1) = \tfrac{1}{2}j(j-1).$$

Сокращая на $j+1$ (напомним, что $j \geq 0$), получаем указанные значения.

Это дает оценку сверху для суммарной размерности резонансных блоков:

$$2\dim V_0+\dim V_{-1}+\dim V_1+\dim V_{-2}+\dim V_2+\dim V_3$$
$$=\dim V_0+n^2=(n-k-m)^2+n^2.$$

Это меньше, чем $2n^2-1$ (так как $k+m>0$). Параметров, содержащихся в c_j, заведомо не хватает.

Но, мы могли бы брать матрицу p в более общем виде, не приводя к жордановой форме. Размерность орбиты $p=\mathrm{diag}(1_k,-1_m,0_l)$ при произвольных сопряжениях равна

$$\dim G(p)=n^2-k^2-m^2-(n-k-m)^2.$$

Пояснение. При действии группы $G=GL_n$ на многообразии $M=\mathrm{Mat}_n$ размерность орбиты точки p равна

$$\dim G(p)=\dim M-\dim G_p,$$

где G_p — подгруппа, оставляющая точку неподвижной (стабилизатор p). У нас $\dim M=n^2$, G_p состоит из невырожденных матриц, коммутирующих с p. Имеем $\dim G_p=k^2+m^2+(n-k-m)^2$; отсюда находим $\dim G(p)$.

Складывая оба числа, доводим возможное число произвольных постоянных до
$$2n^2 - k^2 - m^2.$$
При произвольных k и m это все ещё меньше, чем $2n^2 - 1$, то есть, семейство решений недостаточно «толстое».

Нужное число получаем только при $k = 1$, $m = 0$ или $k = 0$, $m = 1$ (что то же самое, с учетом замены $y \to -y$).

Выводы

- Необходимое число параметров может набраться (а может, и нет), лишь если p приводится к виду $p = \operatorname{diag}(1, 0 \ldots, 0)$ (одномерный проектор).
- При этом в рекуррентных соотношениях должны сыграть все допустимые резонансы («лишних» параметров нет).
- Орбита p также должна использоваться полностью, а это означает, что условия разрешимости в резонансах должны выполняться для всех p из орбиты. Иначе говоря, ограничения на a, b_1, b_2 должны быть инвариантными относительно произвольных матричных сопряжений.

Второй этап: разбиение на случаи

Итак, пусть $p=\operatorname{diag}(1,0,\dots,0)$. При этом блочная струкура упрощается:

$$L_\sigma:\quad \begin{array}{c|cc} & 1 & n-1\\ \hline 1 & & \\ n-1 & & \end{array}\;\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 3c_{11} & (1+\sigma)c_{12}\\ (1-\sigma)c_{21} & 0\end{pmatrix}.$$

Собственные значения $\lambda_{\pm2}$ пропадают.

Чтобы набиралась нужная размерность, оба собственных значения $\lambda_{\pm1}$ должны быть резонансными, что отвечает условиям

$$j=2\pm\kappa.$$

Отсюда следует, что параметр κ должен быть таким, чтобы оба числа $2\pm\kappa$ были целыми неотрицательными. Это даёт допустимые значения

$$\kappa=0,\pm1,\pm2.$$

Случай $\kappa<0$ сводится к $\kappa>0$ (замену $y\to-y$ мы уже использовали при фиксации вида p, но есть ещё замена $y\to y^t$). Для завершения теста остаётся исследовать разрешимость рекуррентных уравнений (2) при

$$\kappa=0,1,2.$$

Третий этап: анализ рекуррентных соотношений

Все три случая анализируются однотипно. Рассмотрим лишь $\kappa = 2$ (он немного сложнее остальных).

Оператор $L_{j+1} - \frac{1}{2}j(j-1)$ действует на c так:

$$\begin{pmatrix} 3c_{11} & (2+j)c_{12} \\ -jc_{21} & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}j(j-1)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

откуда видно, когда и где случаются резонансы:

- при $j = 0$ в блоках $c_{0,21}$ и $c_{0,22}$;
- при $j = 1$ в блоке $c_{1,22}$;
- при $j = 3$ в блоке $c_{3,11}$;
- при $j = 4$ в блоке $c_{4,12}$.

Теперь нужно расписывать правые части уравнений (2) в явном виде, поблочно, упрощая их при помощи уже найденных соотношений. Это выкладки средней тяжести...

$(j=0)$ Находим $c_{0,11}=c_{0,12}=0$ и имеем два произвольных блока $c_{0,21}$, $c_{0,22}$. Условий разрешимости нет (то есть, имеем уравнения $0=0$).

$(j=1)$ Находим однозначно блоки

$$c_{1,11}=-\tfrac{1}{6}(b_{1,11}+b_{2,11}+z_0),\quad c_{1,12}=-\tfrac{1}{6}b_{2,12},\quad c_{1,21}=\tfrac{1}{2}b_{1,21}+c_{0,22}c_{0,21},$$

а блок $c_{1,22}$ произволен, условий разрешимости нет.

$(j=2)$ Все блоки c_2 находятся однозначно (при этом j резонансов нет):

$$c_{2,11}=-\tfrac{1}{4}(a_{11}+1)+\tfrac{1}{12}(b_{2,12}-3b_{1,12})c_{0,21},$$
$$c_{2,12}=\dots,\quad c_{2,21}=\dots,\quad c_{2,22}=\dots.$$

$(j=3)$ Блок $c_{3,11}$ произволен, при условии, что выполнено условие

$$3b_{1,12}b_{1,21}-2b_{2,12}b_{1,21}-b_{2,12}b_{2,21}+6(b_{1,12}-b_{2,12})c_{0,22}c_{0,21}=0.$$

В силу произвольности $c_{0,22}$ и $c_{0,21}$, заключаем отсюда, что должно быть

$$b_{1,12}-b_{2,12}=0,$$

то есть, в первой строке матрицы b_1-b_2 лишь первый элемент ненулевой.

Это условие привязано к выбору p. В качестве p можно взять матрицу с единицей в любом месте диагонали, откуда следует, что матрица $b_1 - b_2$ диагональна. Так как она должна остаться таковой при произвольном сопряжении, то она скалярна. Тогда $b_1 = b_2 + 2\beta I$, что сводится к

$$b_1 = b_2 = b.$$

При выполнении этого условия блок $c_{3,11}$ произволен, блоки $c_{3,12}$, $c_{3,21}$ и $c_{3,22}$ вычисляются однозначно.

$(j = 4)$ Блок $c_{4,12}$ произволен, при условии, что выполнено условие

$$b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + 2b_{12}.$$

Это ни что иное, как $([b, a] - 2b)_{12} = 0$. Повторяя предыдущее рассуждение, заключаем, что должно выполняться соотношение

$$[b, a] = 2b,$$

с учетом, что к b можно добавлять скалярную матрицу за счёт сдвига z. При транспонировании, меняющем $\kappa = 2$ на $\kappa = -2$, меняется также знак у коммутатора. Остальные блоки c_4 вычисляются однозначно.

Все последующие коэффициенты c_j определяются однозначно, так как вырождений оператора больше не происходит.

Итак, при выполнении указанных условий коэффициенты ряда находятся с произволом в блоках $c_{0,21}$, $c_{0,22}$, $c_{1,22}$, $c_{3,11}$ и $c_{4,12}$, имеющих, вместе с орбитой p, требуемую суммарную размерность.

Аналогично обстоит дело в случаях $\kappa = 0$ и $\kappa = 1$, где возникают другие условия разрешимости. В результате, приходим к нашей классификационной теореме.

Замечание: зеркальное преобразование

Мы показали, что параметр κ в P_2 «квантуется». Тем удивительнее, что его можно менять произвольно, правда, лишь для GL-инвариантных уравнений. Так называются уравнения

$$y'' = f(z, y, y'), \quad y \in \mathrm{Mat}_n,$$

не меняющиеся при произвольном сопряжении

$$y \mapsto cyc^{-1}, \quad c \in \mathrm{Mat}_n\,.$$

В этом случае есть замена, добавляющая $[y, y']$ с *любым* коэффициентом.

Утверждение [Golubchik & Sokolov 1997]

Пусть $\kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa \neq 0$. Преобразование $y \leftrightarrow \tilde{y}$

$$\kappa y = w' w^{-1}, \qquad \kappa \tilde{y} = w^{-1} w'$$

связывает общие решения GL-инвариантных уравнений

$$y'' = \kappa[y, y'] + f(z, y, y') \qquad \text{и} \qquad \tilde{y}'' = f(z, \tilde{y}, \tilde{y}').$$

Доказательство. Имеем

$$\tilde{y} = w^{-1}yw, \qquad \tilde{y}' = w^{-1}y'w + [\tilde{y}, w^{-1}w'] = w^{-1}y'w,$$
$$\tilde{y}'' = w^{-1}y''w + [\tilde{y}', w^{-1}w'] = w^{-1}f(y, y', z)w + \kappa[\tilde{y}', \tilde{y}]$$

и остается лишь воспользоваться свойством инвариантности f. □

Более того, это преобразование продолжается на лаксовы пары. Пусть уравнение для y служит условием совместности линейных уравнений

$$\Psi_\zeta = A\Psi, \quad \Psi' = B\Psi \quad \Rightarrow \quad A' = B_\zeta + [B, A],$$

где A и B рациональны по y, y' и z со скалярными коэффициентами. Тогда при калибровке $\Psi = w\tilde{\Psi}$ имеем

$$\tilde{A} = w^{-1}Aw, \quad \tilde{B} = w^{-1}Bw - w^{-1}w' = w^{-1}Bw - \kappa\tilde{y}.$$

Таким образом, в матрицах лишь произойдет замена переменных на переменные с тильдой, и к $\tilde{B}$ добавится диагональная матрица.

В частности, уравнение

$$y'' = \kappa[y, y'] + 2y^3 + zy + \alpha, \quad \kappa, \alpha \in \mathbb{C}$$

допускает, при *произвольном κ*, изомонодромную лаксову пару $A' = B_\zeta + [B, A]$ с матрицами

$$B = \begin{pmatrix} \zeta + \kappa y & y \\ y & \kappa y - \zeta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -4\zeta^2 + 2y^2 + z & -4\zeta y - 2y' - \alpha/\zeta \\ -4\zeta y + 2y' - \alpha/\zeta & 4\zeta^2 - 2y^2 - z \end{pmatrix}$$

(напомним, что скаляры ζ, z, α/ζ следует домножать на $1 \in \mathrm{Mat}_n$).

Вывод (не новый)

Наличие изомонодромного представления не гарантирует выполнения свойства Пенлеве.

Квантованные значения $\kappa = 0, \pm1, \pm2$ возникают не только из теста КП, но и при редукциях из уравнений в частных производных, к чему мы сейчас переходим.

Галилеевская редукция матричного НУШ

НУШ

$$u_t = u_{xx} + 2uvu, \quad v_t = -v_{xx} - 2vuv, \quad u, v \in \mathrm{Mat}_n\,.$$

Представление $U_t = V_x + [V, U]$:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & -v \\ u & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = -2\lambda U + \begin{pmatrix} -vu & v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix}.$$

Инвариантность относительно однопараметрической подгруппы, порожденной преобразованием Галилея, сдвигом t и сопряжением матрицей e^b, приводит к такой редукции:

$$u = e^r p(z), \quad v = q(z)e^{-r},$$
$$r = \tfrac{1}{6}(t^3 - 3xt) - tb, \quad z = x - \tfrac{1}{2}t^2, \quad b \in \mathrm{Mat}_n\,.$$

(Чтобы перейти к изомонодромной паре Лакса, нужно положить дополнительно $\zeta = \lambda - \frac{1}{4}t$. Здесь мы это опустим, а позже проиллюстрируем на примере мКдФ.)

В результате редукции возникает система ОДУ

$$\begin{cases} p'' = -\frac{1}{2}zp - bp - 2pqp, \\ q'' = -\frac{1}{2}zq - qb - 2qpq, \end{cases} \qquad b \in \mathrm{Mat}_n\,. \tag{3}$$

Ее порядок можно понизить на единицу за счёт первого интеграла

$$qp' - q'p = c, \quad c \in \mathrm{Mat}_n\,. \tag{4}$$

Переход к логарифмическим производным от p и q также понижает порядок на единицу.

Однако, совместить оба способа удаётся, лишь если одна из постоянных b или c является скалярной. Рассмотрим оба варианта.

Случай $b\in\mathrm{Mat}_n,\ 2c=\gamma\in\mathbb{C}\ \Rightarrow \mathrm{P}_2^0$

Положим
$$f=p'p^{-1},\quad g=q^{-1}q',\quad h=2pq,$$
тогда уравнения (3), (4) примут вид
$$\begin{cases} f'=-f^2-\frac12 z-b-h,\\ g'=-g^2-\frac12 z-b-h,\\ h'=fh+hg,\end{cases}\qquad f-g=\gamma h^{-1}.$$
Исключение g и h приводит к P_2^0 на переменную f:
$$f''=2f^3+zf+bf+fb+\gamma-\tfrac12.$$

Замечание

Из симметрии $f\leftrightarrow g$, для g следует P_2^0 со свободным членом $-\gamma-\frac12$. Комбинируя с заменой $g\leftrightarrow -g$, получаем преобразование Бэклунда. Его итерации описываются, в переменных p или q, неабелевой цепочкой Тоды. Наоборот, можно вывести P_2^0, стартуя с цепочки Тоды и накладывая на нее соответствующую редукцию [Retakh & Rubtsov 2010].

Случай $c \in \mathrm{Mat}_n,\ b \in \mathbb{C}\ \Rightarrow \mathrm{P}_2^1$

Положим $b = 0$ без потери общности, переопределив z.

Применим на этот раз другую замену:

$$f = p^{-1}p', \quad g = q'q^{-1}, \quad h = 2qp.$$

тогда уравнения (3), (4) примут вид

$$\begin{cases} f' = -f^2 - \frac{1}{2}z - h, \\ g' = -g^2 - \frac{1}{2}z - h, \\ h' = hf + gh, \end{cases} \qquad hf - gh = 2c.$$

Исключение g и h приводит к P_2^1:

$$f'' = -[f, f'] + 2f^3 + zf + 2c - \tfrac{1}{2}.$$

Автомодельная редукция в мКдФ

Известно, что скалярное P_2 возникает также из мКдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6u^2 u_x,$$

в результате редукции по группе растяжений. Это приводит к уравнению $y''' = 6y^2y' + y + zy'$, откуда интегрированием получается P_2.

- Мы обобщим эту процедуру на неабелев случай.
- Имеется два неабелевых мКдФ, одно приводит к P_2^1, второе к P_2^2.
- В обоих случаях, неабелев параметр в уравнении появляется благодаря тому, что в группу растяжений можно включить сопряжение матричной экспонентой.
- Кроме того, в самом мКдФ-2 есть еще один неабелев параметр. Он должен быть связан с параметром в экспоненте.

мКдФ-1 $\Rightarrow$ P_2^1

мКдФ-1 [Marchenko 1986]

$$u_t = u_{xxx} - 3u^2 u_x - 3u_x u^2.$$

Представление $U_t = V_x + [V, U]$:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & u \\ u & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = 4\lambda^2 U + \begin{pmatrix} -2\lambda u^2 + [u, u_x] & 2\lambda u_x + u_{xx} - 2u^3 \\ -2\lambda u_x + u_{xx} - 2u^3 & 2\lambda u^2 + [u, u_x] \end{pmatrix}.$$

Применим автомодельную подстановку:

$$u = \varepsilon\tau e^{\log(\tau)d} y(z) e^{-\log(\tau)d}, \quad \tau = t^{-1/3}, \quad z = \varepsilon\tau x, \quad \lambda = \varepsilon\tau\zeta,$$

где

$$3\varepsilon^3 = -1, \quad d \in \mathrm{Mat}_n\,.$$

При этом

$$\partial_t = (\varepsilon\tau)^3(\tau\partial_\tau + z\partial_z - \zeta\partial_\zeta), \quad \partial_x = \varepsilon\tau\partial_z.$$

мКдФ-1 переходит в

$$y''' = 3y^2y' + 3y'y^2 + y + zy' + [d, y].$$

В отличие от скалярного случая, первого интеграла нет, даже при $d = 0$. Но, оказывается, что понижение порядка возможно за счет *частного* первого интеграла: уравнение выполняется в силу P_2^1

$$y'' = \kappa[y, y'] + 2y^3 + zy + a, \quad \kappa^2 = 1, \quad d = \kappa a.$$

Замечание

То, что для неабелевых уравнений ПИ пропадают — типичное явление (хотя в примере с НУШ интеграл был). Выражение I называется частным ПИ, если равенство $I = c$ определяет инвариантное подмногообразие лишь для одного значения $c = 0$. В данном примере ЧПИ связан с тем, что исходное мКдФ-1 можно записать в виде

$$u_t = (D_x - \operatorname{ad} u)(u_{xx} + [u, u_x] - 2u^3).$$

Аналогично, мКдФ-2 записывается в виде $u_t = (D_x + \operatorname{ad} u)(\dots)$.

Переменная τ в матрицах U и V отделяется:

$$U = \varepsilon\tau e^{\log(\tau)d} B(\zeta, z, y, y') e^{-\log(\tau)d}, \quad V = (\varepsilon\tau)^3 e^{\log(\tau)d} K(\zeta, z, y, y') e^{-\log(\tau)d}.$$

В результате, уравнение для U и V переписывается в виде

$$-\zeta B_\zeta + zB' + B + [dI, B] = K' + [K, B].$$

Замена $A = -\zeta^{-1}(K - zB - dI)$ приводит к стандартной лаксовой паре.

Утверждение

Уравнение P_2^1

$$y'' = \kappa[y, y'] + 2y^3 + zy + a, \quad \kappa^2 = 1, \quad a \in \mathrm{Mat}_n$$

допускает представление $A' = B_\zeta + [B, A]$, где

$$B = \begin{pmatrix} \zeta & y \\ y & -\zeta \end{pmatrix},$$

$$A = -4\zeta B + \begin{pmatrix} 2y^2 + z & -2y' \\ 2y' & -2y^2 - z \end{pmatrix} - \zeta^{-1}(\kappa[y, y'] + a) \begin{pmatrix} \kappa & 1 \\ 1 & \kappa \end{pmatrix}.$$

мКдФ-2 $\Rightarrow$ P_2^2

мКдФ-2 [Khalilov & Khruslov 1990]

$$u_t = u_{xxx} + 3[u, u_{xx}] - 6uu_xu - 3(u_x + u^2)c - 3c(u_x - u^2), \quad c \in \mathrm{Mat}_n\,.$$

Представление $U_t = V_x + [V, U]$:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c - \lambda & -2u \end{pmatrix},$$

$$V = 2\begin{pmatrix} 2u(c-\lambda) & -u_x - u^2 - c - 2\lambda \\ (u_x - u^2 - c - 2\lambda)(c - \lambda) & 2\lambda u - u_{xx} - [u, u_x] + 2u^3 + 2cu + 2uc \end{pmatrix}.$$

Замечание. По сравнению с [KhKh], в уравнение добавлена константа c. Она связана с преобразованием Миуры, которое строится по ψ-функциям, отвечающим матричному значению спектрального параметра:

$$\psi_{xx} = v\psi - \psi c, \quad u = \psi^{-1}\psi_x.$$

На первый взгляд, добавление c делает невозможной автомодельную подстановку, так как однородность уравнения нарушается. Однако, мы можем дополнить ее следующим образом:

$$u=\varepsilon\tau e^{\log(\tau)d}y(z)e^{-\log(\tau)d},\quad \tau=t^{-1/3},\quad z=\varepsilon\tau x,\quad \lambda=(\varepsilon\tau)^2\zeta,$$
$$c=(\varepsilon\tau)^2e^{\log(\tau)d}c_0e^{-\log(\tau)d},\quad 2c_0+[d,c_0]=0,$$

где

$$3\varepsilon^3=-1,\quad d,c_0\in\mathrm{Mat}_n\,.$$

Дифференцирование по τ показывает, что при этом $c=\mathrm{const}$.

мКдФ-2 переходит в

$$y'''=3[y'',y]+6yy'y+y+zy'+3(y'+y^2)c_0+3c_0(y'-y^2)+[d,y].$$

Как и в предыдущем случае, порядок понижается за счет частного первого интеграла: уравнение является следствием P_2^2 с $\kappa=-2$, $3c_0=b$ и $d=-a$.

Дальнейшие манипуляции с матрицами такие же, как раньше. В результате, получаем следующую лаксову пару.

Утверждение

Уравнение P_2^2 с $\kappa=-2$

$$y''=-2[y,y']+2y^3+zy+by+yb+a,\quad a,b\in\mathrm{Mat}_n,\quad [a,b]=2b,$$

допускает представление $A'=B_\zeta+[B,A]$, где

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3}b-\zeta & -2y\end{pmatrix},$$

$$A=\frac{1}{\zeta}\begin{pmatrix}2\zeta y-\frac{2}{3}yb-\frac{1}{2}(a+1) & 2\zeta+y'+y^2+\frac{1}{3}b+\frac{z}{2}\\ (2\zeta-y'+y^2+\frac{1}{3}b+\frac{z}{2})(\frac{1}{3}b-\zeta) & -2\zeta y-[y,y']+\frac{1}{3}by+\frac{1}{3}yb+\frac{1}{2}a\end{pmatrix}.$$

Заключение

- найдено три матричных обобщения P_2, удовлетворяющих тесту КП
- при редукциях следует учитывать матричное сопряжение
- понижение порядка усложняется
- алгоритм перехода к изомонодромной лаксовой паре не меняется

Мы ожидаем подобного разнообразия и для других уравнений Пенлеве.

- в литературе известны неабелевы аналоги для всех P_1–P_6, но ответы заведомо не полны
- открыты вопросы о числе разновидностей и о неабелевых параметрах
- даже для P_2 классификация условная — только для семейства (1)
- имеются обширные списки неабелевых интегрируемых уравнений, к которым стоит применить процедуру редукции

Пример. P_4 с параметрами $c \in \mathrm{Mat}_n$ и $\alpha \in \mathbb{C}$

$$y'' = \frac{1}{2}(y' + 2c)y^{-1}(y' - 2c) + \frac{1}{2}[y, y'] + \frac{3}{2}y^3 + 4zy^2 + 2(z^2 - \alpha)y + cy + yc$$

возникает (вместе с лаксовой парой) при автомодельной редукции в системе типа НШ.